TUGAS AKHIR - SM141501

PENYELESAIAN HARGA OPSI JUAL EUROPEAN BARRIER UP AND IN, UP AND OUT MENGGUNAKAN TRANSFORMASI LAPLACE

DEWI EKA PRIYANTI
NRP 1212 100 010

Dosen Pembimbing:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Sentot Didik S., M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

FINAL PROJECT - SM141501

SOLUTION OF EUROPEAN BARRIER UP AND IN, UP AND OUT PUT OPTION PRICING USE LAPLACE TRANSFORM

DEWI EKA PRIYANTI
NRP 1212 100 010

Supervisors:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Sentot Didik S., M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

PENYELESAIAN HARGA OPSI JUAL EUROPEAN BARRIER UP AND IN, UP AND OUT MENGGUNAKAN TRANSFORMASI LAPLACE

SOLUTION OF EUROPEAN BARRIER UP AND IN, UP AND OUT PUT OPTION PRICING USE LAPLACE TRANSFORM

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
DEWI EKA PRIYANTI
NRP. 1212 100 010

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Drs. Sentot Didik S., M.Si	Endah Rokhmati M.P., Ph.D
NIP. 19600527 198701 1 001	NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S. Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2016

PENYELESAIAN HARGA OPSI JUAL EUROPEAN BARRIER UP AND IN, UP AND OUT MENGGUNAKAN TRANSFORMASI LAPLACE

Nama Mahasiswa	:	Dewi Eka Priyanti
NRP	:	1212 100 010
Jurusan	:	Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	:	1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
		2. Drs. Sentot Didik S., M.Si

Abstrak

Transformasi Laplace adalah salah satu metode transformasi yang digunakan untuk menyelesaikan Persamaan Black-Scholes dalam menentukan harga opsi European. Dalam Tugas Akhir ini dibahas mengenai cara menyelesaikan Persamaan Black-Scholes dengan Persamaan difusi yang berupa Persamaan Diferensial Parsial dengan opsi jual European Barrier up and in, up and out tanpa pembagian dividen dan dilakukan transformasi Laplace, selanjutnya diselesaikan menggunakan pendekatan beda maju. Hasil penyelesaian yang didapat dari pendekatan beda maju kemudian dilakukan invers dengan metode numerik Gaver-Stehfest dengan menggunakan software Matlab serta diharapkan dapat dijadikan prediksi untuk menentukan harga opsi jual European Barrier up and in, up and out.

Kata-kunci: *Transformasi Laplace, Opsi Jual European Barrier up and in, up and out, Pendekatan Beda Maju, Algoritma Gaver-Stehfest*

SOLUTION OF EUROPEAN BARRIER UP AND IN, UP AND OUT PUT OPTION PRICING USE LAPLACE TRANSFORM

Name	:	Dewi Eka Priyanti
NRP	:	1212 100 010
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors	:	1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
		2. Drs. Sentot Didik S., M.Si

Abstract

Laplace transform is one of method that applied to solve the Black-Scholes equation with boundary condition for a European option. The final project's goal to discuss the problem of pricing a European option in terms of a partial differential equation in difusion equation without dividend European Barrier up and in, up and out put option and be solved with Laplace transform, then use Forward Finite Difference. The solutions of Laplace transform is simulated with Gaver-Stehfest to get Laplace inversion on Matlab 2010a. After get the models, be expected can be predicted for European barrier up and in, up and out put option pricing. It means Laplace transform method is numerical solution to solve the Black-Scholes equation.

Key-words: *Laplace Transform Method, European Barrier up and in, up and out Put Option, Forward Finite Difference, Gaver-Stehfest algorithm*

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Daftar Simbol

S_T	:	Harga saham pada saat jatuh tempo.
K	:	*Strike price.*
$P(S,\tau)$	:	Harga opsi jual European.
$C(S,\tau)$	:	Harga opsi beli European.
r	:	*Interest rate.*
B_u	:	*Upper Barrier.*
T	:	Waktu jatuh tempo.
τ	:	Waktu hidup opsi dari $t = 0$ sampai waktu jatuh tempo.
σ	:	Volatilitas.
P_{ui}	:	Harga opsi jual *up and in.*
P_{uo}	:	Harga opsi jual *up and out.*
μ	:	*Drift.*
Π	:	Harga portofolio.
Δ	:	Laju perubahan nilai *option* terhadap *stock price.*
$\mathcal{L}$	:	Transformasi Laplace.
s	:	Variabel Laplace.
$N(d_1)$	:	Norm CDF dari d_1.
$N(d_2)$	:	Norm CDF dari d_2.

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang menjadi latar belakang munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Seiring berkembangnya zaman dan tuntunan kebutuhan masyarakat yang semakin meningkat, investasi adalah salah satu cara yang tepat untuk dijadikan lahan bisnis yang menjanjikan karena memperoleh keuntungan yang cukup besar dibandingkan menabung di bank. Akan tetapi tidak jarang ketika berinvestasi ada resiko kehilangan modal atau memperoleh kerugian. Dalam berinvestasi, pemegang saham *(holder)* memiliki pilihan untuk membeli langsung aset di pasar saham atau membeli aset derivatif di pasar derivatif. Pasar derivatif adalah pasar keuangan yang memperdagangkan aset derivatif yakni instrumen keuangan yang nilainya diturunkan dari nilai aset yang lain. Instrumen yang diperjualbelikan dalam pasar derivatif diantaranya berupa kontrak. Contoh kontrak yang populer diperdagangkan dalam pasar derivatif adalah *forward*, *future*, *swaps*, dan opsi.

Dalam Tugas Akhir ini kontrak yang dibahas yakni mengenai opsi. Opsi adalah salah satu kontrak keuangan yang memberikan hak kepada pembeli opsi (bukan kewajiban) untuk membeli atau menjual aset dasar dengan harga yang ditentukan di awal dan dilakukan pada saat atau sebelum tanggal jatuh tempo yang telah ditentukan. Hak tersebut diperoleh pembeli opsi dengan membayarkan sejumlah uang kepada penjual opsi yang dinamakan dengan harga opsi. Secara umum opsi dapat dibedakan menjadi opsi beli *(call option)* dan opsi jual *(put option)*. Kedua opsi tersebut disebut opsi vanila. Opsi beli adalah jenis kontrak yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada *holder* untuk membeli aset dasar dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu. Sedangkan opsi jual adalah jenis kontrak yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada *holder* untuk menjual aset dasar dengan harga tertentu dan pada waktu tertentu. Aset dasar ini dapat berupa saham, indeks saham, obligasi, komoditas, mata uang asing dan lain-lain [1].

Berdasarkan waktu pelaksanaan, opsi dibedakan menjadi dua yaitu opsi *European* dan opsi *American.* Pada opsi *European*, opsi hanya bisa di-*exercise* pada hari terakhir masa berlakunya opsi tersebut *(expiration date).* Ada dua jenis opsi yaitu opsi vanilla dan opsi eksotik. Opsi eksotik adalah opsi yang *payoff*-nya tidak hanya bergantung pada aset saat di-*exercise*, tetapi juga bergantung pada harga-harga aset selama masa hidup opsi. Contoh opsi eksotik adalah opsi *Barrier*, opsi *Lookback*, opsi *Asian*, *Range notes*, dan opsi *Compound* [2]. Dari contoh opsi eksotik tersebut, terdapat beberapa opsi yang sangat bergantung pada lintasan harga aset selama masa hidup opsi yang disebut opsi *path-dependent.* Contoh dari opsi *path-dependent* adalah opsi *Barrier*, opsi *Lookback*, dan opsi *Asian.*

Opsi *Barrier* adalah salah satu jenis opsi *path dependent* yang nilainya bergantung pada harga aset dasar sepanjang periode opsi tersebut. Secara lebih khusus, *payoff* dari opsi

Barrier tidak hanya bergantung pada harga akhir dari aset dasar, namun juga bergantung pada apakah harga aset dasar tersebut mencapai suatu batas nilai *barrier* atau tidak selama masa berlakunya opsi tersebut. Secara umum opsi *Barrier* dapat dibedakan menjadi dua yaitu opsi *knock-in* dan opsi *knock-out*. Jika nilai *barrier* lebih tinggi daripada harga saham S pada saat t=0 maka opsi *Barrier* tersebut bertipe *up* begitu juga sebaliknya dengan opsi *Barrier* bertipe *down* [3].

Pada tahun 1973 Fisher Black dan Myron Scholes merumuskan suatu metode untuk menetapkan harga opsi [4]. Metode tersebut dikenal dengan persamaan *Black-Scholes* dimana volatilitasnya diasumsikan konstan. Persamaan *Black-Scholes* merupakan salah satu model matematika yang dapat digunakan untuk menentukan harga pada opsi *European*. Salah satu konsep matematika yang digunakan untuk mengatasi permasalahan tersebut yakni dengan transformasi Laplace. Menurut penelitian Hyoseop Lee dan Dongwoo Sheen [5], metode transformasi Laplace mempunyai tingkat konvergensi yang tinggi yaitu nilainya menuju ke satu titik pertemuan, hal ini menunjukkan bahwa metode tersebut sangat efisien untuk menghitung berbagai harga opsi. Sehingga pada Tugas Akhir ini digunakan transformasi Laplace untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan Black-Scholes untuk harga opsi jual *European Barrier up and in, up and out*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, disusun suatu rumusan masalah yang dibahas dalam Tugas Akhir ini yaitu:

1. Bagaimanakah penyelesaian dari persamaan *Black-Scholes* opsi jual *European Barrier up and out* menggunakan transformasi Laplace.

2. Bagaimanakah penyelesaian dari persamaan *Black-Scholes* opsi jual *European Barrier up and in* dengan *Put-Call barrier Parity* menggunakan transformasi Laplace.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini antara lain:

1. Opsi yang digunakan adalah opsi jual *European Barrier up and in, up and out.*

2. *Interest rate* konstan bebas resiko.

3. Tidak terdapat biaya transaksi dan pajak.

4. Saham yang digunakan tidak memberikan dividen.

5. Menggunakan *strike price* K yang konstan.

6. Menggunakan *software* MATLAB 2010a untuk mencari invers Laplace pada permasalahan Tugas Akhir ini.

1.4 Tujuan

Tujuan yang dicapai dari penulisan Tugas Akhir ini antara lain:

1. Mendapatkan penyelesaian dari persamaan *Black-Scholes* opsi jual *European Barrier up and out* menggunakan transformasi Laplace.

2. Mendapatkan penyelesaian dari persamaan *Black-Scholes* opsi jual *European Barrier up and in* dengan *Put-Call barrier Parity* menggunakan transformasi Laplace.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diperoleh dari Tugas Akhir ini adalah memahami tentang aplikasi transformasi Laplace dalam menyelesaikan model atau persamaan *Black-Scholes* dari opsi jual *European Barrier up and in, up and out*.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, antara lain:

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Pada Bab II berisi teori-teori utama maupun penunjang yang terkait dengan permasalahan, yaitu beberapa penelitian terdahulu, persamaan *Black-Scholes*, opsi jual *European Barrier up and in, up and out*, transformasi Laplace, persamaan difusi, Metode Beda Hingga, *Put-Call Barrier Parity*, dan algoritma Gaver-Stehfest. Teori-teori tersebut digunakan sebagai acuan dalam mengerjakan Tugas akhir.

3. BAB III METODE PENELITIAN
   Bab ini membahas tentang metode dan tahapan-tahapan dalam proses penyelesaian masalah dan mencapai tujuan Tugas Akhir. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, selanjutnya dilakukan analisis masalah dengan mendapatkan model matematika pada persamaan *Black-Scholes*, lalu penyelesaian persamaan *Black-Scholes* pada opsi jual *European Barrier up and in, up and out* dengan metode transfor-

masi Laplace. Setelah mendapatkan penyelesaian dengan transformasi Laplace dengan Metode Beda Hingga dilakukan invers dari transformasi Laplace dengan metode numerik algoritma Gaver-Stehfest untuk mendapatkan solusi numeriknya dengan simulasi *software* Matlab 2010a. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan simulasi serta pembahasan yang telah dilakukan.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Pada Bab IV dibahas secara detail mengenai solusi numerik dari opsi jual *European Barrier up and in, up and out* menggunakan transformasi Laplace.

5. BAB V PENUTUP
   Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis pada bab sebelumnya serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai landasan teori dan materi pendukung lainnya yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir ini antara lain persamaan *Black-Scholes*, opsi jual *European Barrier up and in, up and out*, Persamaan difusi, Metode Beda Hingga, transformasi Laplace, algoritma *Gaver-Stehfest*.

2.1 Penelitian Terdahulu

Berdasarkan penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Celine Labart dan Jerome Lelong mengenai penentuan harga opsi *Parisian* dengan transformasi Laplace didapatkan penyelesaian dengan pendekatan numerik. Dalam opsi *Parisian* pengaruh yang muncul yakni harga saham tidak dapat ditekan pada periode waktu yang lama tetapi hanya pada waktu tertentu saja. Terdapat penelitian lain yang dilakukan oleh G. Alobaidi, R. Mallier, dan S. Mansi mengenai transformasi Laplace dan opsi *shout* menggunakan penyelesaian analitik dikarenakan penyelesaian secara numerik dengan metode *forward-looking* Monte Carlo sulit digunakan karena tidak dapat secara efektif menangani komponen optimisasi dari opsi *shout* [7]. Walaupun analisis dari opsi shout lebih sederhana.

2.2 Opsi

Istilah-istilah yang banyak digunakan dalam opsi [2]:

- *Holder* adalah pihak yang membeli kontrak opsi.

- *Writer* adalah pihak yang mengeluarkan atau menjual kontrak opsi.
- *Strike price* adalah harga yang harus dibayarkan *holder* kepada *writer* jika mengeksekusi opsi.
- *Payoff* adalah sejumlah nilai yang diterima *holder* saat masa opsi .
- *Risk-free rate* atau tingkat suku bunga bebas resiko (r) adalah tingkat suku bunga yang diasumsikan diperoleh jika berinvestasi aset yang bebas resiko.
- *Expiration date* adalah waktu jatuh tempo.
- Aset dasar adalah aset yang menjadi dasar dari kontrak opsi.
- Harga opsi adalah harga awal yang diberikan *holder* kepada *writer* untuk memperoleh hak opsi.
- Volatilitas adalah standar deviasi dari harga aset keuangan.

Opsi terdiri dari dua jenis, yaitu opsi vanila dan opsi eksotik. Karena pada Tugas Akhir ini hanya dibahas mengenai opsi *Barrier* yang merupakan salah satu bentuk opsi eksotik dan opsi jual yang merupakan salah satu jenis dari opsi vanila, maka berikut ini akan dipaparkan mengenai opsi eksotik dan opsi vanila.

2.3 Opsi Jual *European*

Put option atau opsi jual adalah memberikan hak kepada pemegang opsi (holder) untuk menjual sejumlah aset yang ada di pasar saham seharga *strike price.* Misal, S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo, K adalah harga saham yang ditetapkan atau harga pelaksanaan *(strike price)* , dan T adalah waktu jatuh tempo *(expiration date)*. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih kecil daripada harga saham yang telah ditentukan (harga pelaksanaan) atau $S_T < K$ maka keuntungan yang diperoleh sebesar $K - S_T$. Sebaliknya, jika $S_T > K$ maka pemegang opsi jual *European* tidak melakukan haknya sehingga keuntungannya adalah nol.

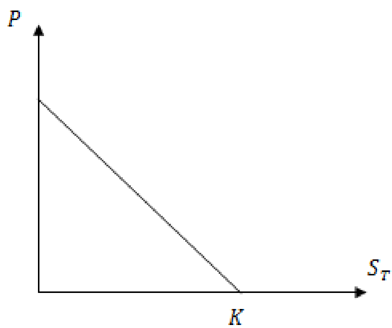
Dengan demikian, harga opsi jual *European* (P) saat jatuh tempo adalah:

$$P = \begin{cases} K - S_T, & \text{untuk } \mathrm{S_T} < \mathrm{K} \\ 0, & \text{untuk } \mathrm{S_T} \geq \mathrm{K}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Sehingga, didapatkan Persamaan umum dari opsi jual adalah:

$$P(S,T) = max\ (K - S_T, 0) \tag{2.2}$$

dengan P adalah harga opsi jual pada waktu jatuh tempo, S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo, K adalah harga pelaksanaan *(strike price)*. Persamaan (2.2) dapat ditunjukkan melalui Gambar 2.1 berikut :



Gambar 2.1: Harga Opsi Jual pada Saat Jatuh Tempo

Dari Gambar 2.1 menunjukkan bahwa harga opsi jual akan bernilai nol jika harga saham lebih tinggi dari harga pelaksanaan. Sebaliknya, jika harga saham lebih rendah dari harga pelaksanaan maka harga opsi jual akan bernilai positif, yaitu sebesar selisih antara harga pelaksanaan dengan harga saham. Berdasarkan uraian di atas, dapat diketahui bahwa [9]:

1. Pada saat harga saham lebih rendah dari harga pelaksanaan ($S_T < K$), maka opsi jual akan bernilai positif dan dikatakan dalam keadaan *in the money* (ITM). Dalam keadaan ini, pemegang opsi jual akan menggunakan haknya dan nilai opsi ini yaitu sebesar selisih antar harga pelaksanaan dan harga saham.

2. Pada saat harga saham memiliki harga di pasar sama dengan harga pelaksanaan ($S_T = K$), maka opsi jual dikatakan dalam keadaan *at the money* (ATM), sehingga opsi ini akan bernilai nol dan pemegang opsi jual akan menanggung kerugian sebesar premi opsi yang telah dibayarkan.

3. Pada saat harga saham lebih tinggi daripada harga pelaksanaan ($S_T > K$), maka opsi jual dikatakan dalam keadaan *out of the money* (OTM). Dapat dikatakan bahwa pemilik opsi tidak akan menggunakan opsinya karena ia dapat menjual saham dengan harga yang lebih tinggi di pasar saham. Kerugian maksimal yang diderita sama dengan harga premi opsi yang telah dibayarkan.

.

2.4 Opsi Eksotik

Opsi eksotik adalah opsi yang *payoff*-nya tidak hanya bergantung pada aset saat di*exercise*, tetapi juga bergantung pada harga-harga aset selama masa hidup opsi. Opsi *Barrier* yang merupakan salah satu bentuk opsi eksotik adalah opsi dimana *payoff* (penerimaan) bergantung pada harga aset yang mendasari tercapainya suatu tingkat tertentu selama periode waktu tertentu [10]. Jadi secara keseluruhan opsi *Barrier* dapat dibagi menjadi empat jenis yaitu :

1. *Down and in* : opsi *Barrier* dengan nilai *barrier* lebih besar daripada harga saham S pada saat t=0 (barrier terletak di bawah harga saham S) dan dapat di-*exercise* jika selama masa berlaku opsi, harga saham mencapai nilai *barrier* tersebut.

2. *Down and out* : opsi *Barrier* dengan nilai *barrier* lebih besar daripada harga saham S pada saat t=0 (*barrier* terletak di bawah harga saham S) dan tidak dapat di-*exercise* jika selama masa berlaku opsi, harga saham mencapai nilai *barrier* tersebut.

3. *Up and in* : opsi *Barrier* dengan nilai *barrier* lebih kecil daripada harga saham S pada saat t=0 (*barrier* terletak di atas harga saham S) dan dapat di-*exercise* jika selama masa berlaku opsi, harga saham mencapai nilai *barrier* tersebut.

4. *Up and out* : opsi *Barrier* dengan nilai *barrier* lebih kecil daripada harga saham S pada saat t=0 (*barrier* terletak di atas harga saham S) dan tidak dapat di-*exercise* jika selama masa berlaku opsi, harga saham mencapai nilai *barrier* tersebut.

Karena pada Tugas Akhir ini dibahas mengenai opsi jual *European Barrier up and in* dan *up and out* maka diberikan syarat batas dari keduanya tersebut. Syarat batas dari PDP opsi jual *European Barrier up and in* dan *up and out* berturut-turut dengan asumsi B_u adalah *upper barrier* adalah :

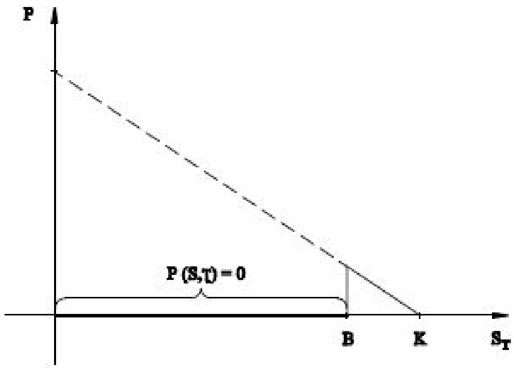
$$P(S,T) = P(S,T), t < T, S_T \geq B_u, B_u < K \tag{2.3}$$

$$P(S,T) = \begin{cases} K - S_T, & \text{untuk } \mathrm{S_T} \geq \mathrm{B_u} \\ 0, & \text{untuk } \mathrm{S_T} < \mathrm{B_u}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Syarat batas dari PDP opsi jual *up and out* dengan asumsi B_u adalah *upper barrier* :

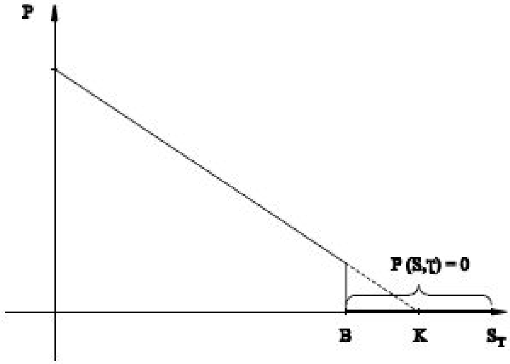
$$P(S,T) = 0, t < T, S_T \geq B_u, B_u < K \tag{2.5}$$

$$P(S,T) = \begin{cases} K - S_T, & \text{untuk } \mathrm{S_T} < \mathrm{B_u} \\ 0, & \text{untuk } \mathrm{S_T} \geq \mathrm{B_u}. \end{cases} \tag{2.6}$$



Gambar 2.2: Opsi Jual untuk *up and in*

Gambar 2.2 adalah Gambar dari opsi jual *European Barrier up and in.* Dari kurva pada Gambar 2.2 dapat dilihat bahwa opsi *Barrier* dengan nilai *barrier* lebih kecil daripada harga saham S pada saat t=0 (*barrier* terletak di atas harga saham S) dan dapat di-*exercise* atau dengan kata lain opsi dapat dilaksanakan haknya untuk menjual jika selama masa berlaku opsi, harga saham mencapai nilai *barrier* tersebut.



Gambar 2.3: Opsi Jual untuk *up and out*

Gambar 2.3 adalah Gambar dari opsi jual *European Barrier up and out*. Dari kurva pada Gambar 2.3 terlihat bahwa opsi *Barrier* dengan nilai *barrier* lebih kecil daripada harga saham S pada saat t=0 (*barrier* terletak di atas harga saham S) dan tidak dapat di-*exercise* jika selama masa berlaku opsi, harga saham mencapai nilai *barrier* tersebut.

2.5 *Put-Call Barrier Parity*

Harga dari opsi beli *European* $C(S,\tau)$ dan opsi jual *European* $P(S,\tau)$ tanpa dividen diberikan sebagai berikut [9] :

$$C(S,\tau) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \tag{2.7}$$

$$P(S,\tau) = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{2.8}$$

dengan,

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\tau}\sigma\sqrt{\tau}$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\tau}\sigma\sqrt{\tau}.$$

Put Barrier Parity harga opsi jual *European* adalah :

$$P_{vanilla} = P_{ui} + P_{uo} \tag{2.9}$$

dengan, S adalah harga saham, K adalah *strike price*, r adalah *interest rate*, t adalah waktu opsi, T waktu hidup opsi, $\tau = T - t$, $C(S, \tau)$ adalah harga opsi beli, $P(S, \tau)$ adalah harga opsi jual, P_{ui} adalah harga opsi jual *up and in*, P_{uo} adalah harga opsi jual *up and out*, $N(d_1)$ adalah norm CDF dari d_1, $N(d_2)$ adalah norm CDF dari d_2.

Hal ini penting karena begitu menemukan harga opsi jual *up and out*, maka harga opsi jual *up and in* dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan *Put Barrier Parity* pada Persamaan (2.9).

2.6 Pembentukan Formula *Black-Scholes* Tanpa Dividen

Di bawah ini akan dijabarkan langkah-langkah pembentukan formula *Black-Scholes* tanpa dividen.
Perubahan harga saham S pada saat (t) diasumsikan mengikuti *geometric brownian motion* yaitu :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dWt \tag{2.10}$$

$$dS = \mu S dt + \sigma S dWt. \tag{2.11}$$

dengan μ *(drift)* adalah tingkat pertumbuhan yang diharapkan pada saham, σ *(volatilitas)* adalah ukuran tingkat ketidakpastian mengenai pergerakan harga saham di masa mendatang. Selanjutnya untuk pembentukan portofolio atau kekayaan dengan asumsi *free arbitrage* yaitu keuntungan tanpa resiko, dinyatakan sebagai berikut :

$$\Pi = V - \Delta S \tag{2.12}$$

dengan Δ adalah banyaknya lembar saham, S adalah perubahan harga saham, Π adalah portofolio, V adalah opsi.

Total portofolio atau kekayaan dinyatakan dengan :

$$d\Pi = dV - \Delta dS. \tag{2.13}$$

Selanjutnya penurunan dV didekati dengan pendekatan Deret Taylor dua variabel bebas dengan penjabaran sebagai berikut :

$$\begin{aligned} V(S+dS, t+dt) &= V(S,t) + \left(\frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt\right) + \frac{1}{2} \\ &\quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}dSdt + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}dt^2\right) + ... \\ V(S+dS, t+dt) &= V(S,t) + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 \\ V(S+dS, t+dt) - V(S,t) &= \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 \end{aligned}$$

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial V}{\partial t}dt. \tag{2.14}$$

Lalu substitusikan dS pada Persamaan (2.11) ke Deret Taylor pada Persamaan (2.14) dengan penjabaran sebagai berikut :

$$dV(S,t) = \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dWt) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\mu S dt + \sigma S dWt)^2 + \frac{\partial V}{\partial t}dt$$

$$= \frac{\partial V}{\partial S}(\mu Sdt + \sigma SdWt) + \frac{1}{2}((\mu Sdt)^2 + 2\mu Sdt.\sigma SdWt + (\sigma SdWt)^2)$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}dt$$
$$= \mu Sdt\frac{\partial V}{\partial S} + \sigma SdWt\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\mu^2 S^2 dt^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu Sdt.\sigma SdWt\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} +$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 dWt^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dt \tag{2.15}$$

Sebelum membahas kalkulus stokastis akan dijabarkan mengenai *Quadratic Variation* sebagai berikut [13]:

Definisi 2.1 $\Pi = t_1, t_2, ..., t_n$ adalah suatu partisi dari $[0, T]$ dengan $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$ dan $\|\Pi\| = maks(t_{k+1} - t_k)$ untuk $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. *Quadratic variation* dari fungsi f adalah $[f, f](T)$ dan didefinisikan dengan :

$$[f, f](T) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^2.$$

Dengan penggunaan *mean value theorem*, suatu *Quadratic Variation* dari suatu fungsi f yang *differentiable* di selang $[0, T]$ akan dibuktikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
[f, f](T) &= \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^2 \\
&= \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_{k+1}^*)|^2 (t_{k+1} - t_k)^2 \\
&\leq \lim_{\|\Pi\| \to 0} \|\Pi\| \sum_{k=0}^{n-1} |f'(t_{k+1}^*)|^2 (t_{k+1} - t_k) \\
&\leq \lim_{\|\Pi\| \to 0} \|\Pi\| \int_0^T f'(t)^2 dt \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Jadi, untuk fungsi f yang *differentiable* di selang $[0, T]$ maka *quadratic variation*-nya adalah $[f, f](T) = 0$. Dengan kata lain jika ada fungsi f dengan *quadratic variation* tidak 0 maka fungsi tersebut tidak *differentiable* seperti yang terjadi pada *Brownian motion* $W(t)$ berikut ini.

Teorema 2.1 $[W, W](T) = T$ tidak *differentiable.*

Bukti Misal $\Pi = t_1, t_2, ..., t_n$ adalah suatu partisi dari $[0, T]$. Misal $D_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ dan didefinisikan $Q_\Pi = \sum_{k=0}^{n-1} D_k^2$ sehingga $Q_\Pi - T = \sum_{k=0}^{n-1}(D_k^2 - (t_{k+1} - t_k))$. Akan diperlihatkan bahwa,

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} (Q_\Pi - T) = 0. \tag{2.17}$$

Mula-mula perhatikan terlebih dahulu hasil berikut :

$$\begin{aligned}
D_k^2 - (t_{k+1} - t_k) &= (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k) \\
E[D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)] &= E[(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k)] \\
&= (t_{k+1} - t_k) - (t_{k+1} - t_k) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$E(Q_\Pi - T) = E(\sum_{k=0}^{n-1}(D_k^2 - (t_{k+1} - t_k))) = 0. \tag{2.18}$$

Di samping itu variansi dari $Q_\Pi - T$ adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
var[Q_\Pi - T] &= \sum_{k=0}^{n-1} var[D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E[D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)]^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} E[D_k^4 - 2D_k^2(t_{k+1}-t_k) + (t_{k+1}-t_k)^2] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 3(t_{k+1}-t_k)^2 - 2(t_{k+1}-t_k)^2 + (t_{k+1}-t_k)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} 2(t_{k+1}-t_k)^2 \\
&\leq \|\Pi\| \sum_{k=0}^{n-1} 2(t_{k+1}-t_k) \\
&\leq \|2\Pi\| T.
\end{aligned}
$$

Jadi,

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} var(Q_\Pi - T) = 0 \tag{2.19}$$

Dari penjabaran variansi $Q_\Pi - T$ dapat disimpulkan bahwa,

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} (Q_\Pi - T) = 0 \tag{2.20}$$

sehingga,

$$[W, W](T) = T$$

Teorema 2.1 memperlihatkan bahwa *paths* dari *Brownian motion* $W(t)$ tidak *differentiable.*

Dari penjabaran variansi $Q_\Pi - T$ diperoleh :

$$E[\{W(t_{k+1}) - W(t_k)\}^2 - (t_{k+1} - t_k)] = 0 \tag{2.21}$$

$$var[\{W(t_{k+1}) - W(t_k)\}^2 - (t_{k+1} - t_k)] = 2(t_{k+1} - t_k)^2. \tag{2.22}$$

Bila $(t_{k+1} - t_k)$ kecil sekali maka $2(t_{k+1} - t_k)^2$ akan sangat kecil sehingga Persamaan (2.23) menjadi:

$$var[\{W(t_{k+1}) - W(t_k)\}^2 - (t_{k+1} - t_k)] \approx 0. \tag{2.23}$$

Dari Persamaan (2.21) dan Persamaan (2.23) dapat disimpulkan bahwa,

$$\{W(t_{k+1}) - W(t_k)\}^2 - (t_{k+1} - t_k) = 0 \tag{2.24}$$

atau

$$\{W(t_{k+1}) - W(t_k)\}^2 = t_{k+1} - t_k \tag{2.25}$$

yang dapat dinyatakan dengan,

$$dW(t).dW(t) = dt. \tag{2.26}$$

Sehingga kalkulus stokastik didapatkan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
(dW(t))^2 &= dt \\
dW(t).dt &= 0 \\
dt^2 &= 0
\end{aligned}$$

maka Persamaan (2.15) menjadi :

$$\begin{aligned}
\partial V(S,t) &= \mu S dt \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S dWt \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{\partial V}{\partial t} dt \\
&= \sigma S dWt \frac{\partial V}{\partial S} + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \\
&= \sigma S dWt \frac{\partial V}{\partial S} + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Kemudian Persamaan (2.27) disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.13) didapatkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
d\Pi &= dV - \Delta dS \\
d\Pi &= \sigma S dWt \frac{\partial V}{\partial S} + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt - \Delta dS \\
d\Pi &= \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dWt + (\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) dt - \Delta dS
\end{aligned}$$

dengan $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$ maka,

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dWt + (\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt - \frac{\partial V}{\partial S}$$
$$(\mu S dt + \sigma S dWt)$$
$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial S}dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt$$
$$d\Pi = \left[\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt.$$

Harapannya adalah perubahan nilai pada portofolio di bank sama dengan portofolio di pasar dengan menggunakan prinsip *free risk rate* maka :

$$d\Pi bank = d\Pi pasar$$

$$d\Pi = r\Pi dt$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt = (V - \Delta S)rdt$$
$$\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - (V - \Delta S)r = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV + r\frac{\partial V}{\partial S}S = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{2.28}$$

Jadi Persamaan (2.28) merupakan Persamaan umum *Black-Scholes* tanpa dividen.

2.7 Persamaan *Black-Scholes*

Model *Black-Scholes* adalah metode yang dipopulerkan oleh Fischer Black dan Myron Scholes pada tahun 1973 untuk menentukan harga teoritis opsi jual *European*. Model ini penggunaannya terbatas pada opsi tipe *European* saja dan tidak berlaku untuk opsi tipe *American.* Asumsi-asumsi yang digunakan dalam *Black-Scholes* adalah :

1. Jenis opsi yang digunakan adalah opsi tipe *European.* Opsi saham tipe *European* hanya dapat dilaksanakan pada waktu jatuh temponya (*expiration date*) sedangkan penggunaan opsi sebelum waktu jatuh temponya tidak akan menguntungkan karena tindakan mengeksekusi opsi akan menyebabkan *holder* kehilangan premi waktu dari opsi tersebut.

2. Variansi harga saham bersifat konstan sepanjang usia opsi dapat diketahui. Jika asumsi tersebut tidak terpenuhi, maka model penetapan harga opsi tidak dapat dikembangkan sehingga memungkinkan perubahan variansi.

3. Tingkat suku bunga bebas resiko. Hal ini berarti suku bunga harga saham yang mendasari opsi tetap konstan.

4. Saham yang mendasari opsi tidak membayarkan dividen (pembagian keuntungan saham) selama usia opsi. Persamaan *Black-Scholes* digunakan bagi saham yang tidak memberikan dividen selama usia opsi. Apabila saham tersebut membayar dividen, maka akan mengurangi harga opsi sehingga model akan berubah.

5. Tidak dibutuhkan biaya transaksi untuk membeli atau menjual baik saham maupun opsinya model *Black-Scholes* mengasumsikan tidak terdapat pajak dan biaya transaksi.

Persamaan umum *Black-Scholes* untuk opsi jual adalah :

$$\frac{\partial P(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P(S,t)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P(S,t)}{\partial S} - rP(S,t) = 0 \tag{2.29}$$

dengan $P(S,t)$ adalah harga saham pada waktu t untuk opsi jual, r adalah suku bunga bebas resiko, σ adalah volatilitas, S adalah harga aset dasar. Persamaan di atas merupakan persamaan diferensial parsial *Black-Scholes* yang digunakan untuk menentukan harga opsi.

2.8 Definisi Transformasi Laplace

Transformasi Laplace merupakan kelas dari transformasi integral yang dimanfaatkan untuk merubah bentuk persamaan diferensial biasa menjadi bentuk persamaan aljabar dan merubah persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa. Pandang $f(t)$ suatu fungsi yang terdefinisi pada $(0,\infty)$, transformasi Laplace dari $f(t)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt. \tag{2.30}$$

Sebaliknya $f(t)$ disebut invers transformasi Laplace dari $F(s)$ dan dinyatakan dengan $\mathcal{L}^{-1}F(s)$, sehingga:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)). \tag{2.31}$$

2.9 Pemakaian Transformasi Laplace pada Persamaan Diferensial Biasa dengan Koefisien Konstan

Persamaan Diferensial Biasa dengan koefisien-koefisien konstan.

Jika $\mathcal{L}\{y(t)\} = F(s)$, maka :

$$\mathcal{L}\left\{y^{'}(t)\right\} = sF(s) - y(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{y^{''}(t)\right\} = s^2F(s) - sy(0) - y^{'}(0)$$

$$......................$$

$$\mathcal{L}\left\{y^n(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y^{'}(0) - ..... - y^{n-1}(0).$$

2.10 Persamaan Diferensial Linear Tingkat Dua

Bentuk umum Persamaan Diferensial tingkat dua adalah sebagai berikut :

$$y^{''} + p(x)y^{'} + q(x)y = r(x)$$

dengan $p(x), q(x)$ disebut koefisien jika $r(x) = 0$ maka PD tersebut disebut homogen, sebaliknya jika $r(x) \neq 0$ maka disebut PD non-homogen. Persamaan Diferensial Biasa orde dua homogen dengan koefisien konstan, memiliki bentuk umum :

$$y^{''} + ay^{'} + by = 0$$

dengan a, b merupakan konstanta sebarang.

2.11 Persamaan Difusi

Persamaan difusi adalah persamaan analitik yang linear dan berorde dua dengan persamaan umumnya adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}, y, \tau > 0. \tag{2.32}$$

2.12 Tinjauan Numerik

Dalam menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan persamaan diferensial parsial, terdapat dua metode penyelesaian yaitu secara analitik dan numerik. Metode numerik merupakan metode penyelesaian masalah dengan menggunakan pendekatan terhadap permasalahan yang akan diselesaikan. Khusus pada permasalahan yang melibatkan persamaan diferensial parsial, pendekatan yang dilakukan adalah dengan membawa bentuk persamaan diferensial parsial yang kontinu menjadi bentuk diskrit atau biasa disebut diskritisasi. Proses diskritisasi memungkinkan terjadinya kesalahan yang mengakibatkan solusi permasalahan yang diperoleh tidak sesuai dengan solusi analitik. Salah satu metode numerik yang ada adalah pendekatan beda hingga, metode ini merupakan metode hampiran dari persamaan diferensial parsial dengan menggunakan ekspansi deret Taylor.

Bentuk turunan yang ada pada persamaan diferensial parsial dapat diekspresikan menjadi bentuk pendekatan, sehingga komputasi digital (yang hanya dapat dioperasikan dengan aritmatika standar dan operator-operator logika) dapat menghasilkan solusi secara numerik. Salah satu metode untuk melakukan pendekatan dari sebuah fungsi diferensial adalah metode ekspansi deret Taylor [11].

Secara matematis ekspansi deret Taylor persamaan diferensial parsial dapat dinyatakan sebagai:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + ...$$

atau

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}. \tag{2.33}$$

2.13 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan salah satu dari metode numerik yang dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial. Ide dasar metode beda hingga yaitu, mendekati turunan di suatu titik dengan memperhitungkan letak titik disekitarnya dalam jarak yang relatif kecil [12].

Keuntungan utama metode ini dibandingkan dengan metode numerik yang lain terletak pada kemudahan mendapatkan skema numerik dari persamaan differensial. Disamping memiliki keuntungan, metode ini juga memiliki kekurangan. Kekurangan dari metode beda hingga ini adalah sistem persamaan linear yang dihasilkan sangatlah besar. Orde matriks yang dihasilkan dapat mencapai ratusan, ribuan bahkan puluhan ribu. Hal ini yang menjadi kendala perkembangan metode ini. Metode beda hingga yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah pendekatan beda maju (eksplisit) dan beda mundur (implisit).

2.13.1 Pendekatan Beda Maju

Misalkan diberikan sebuah fungsi f. Dengan menggunakan expansi deret Taylor pada Persaman (2.38), diperoleh :

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x) + (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \\ &\quad ... + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\Delta x^n}{n!} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x &= f(x+\Delta x) - f(x) - \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \\ &\quad ... - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\Delta x^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \\ &\quad ... - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{\Delta x^{n-1}}{n!}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x}$ sebagai berikut :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + ...$$

Selanjutnya dengan menjumlahkan semua suku-suku dengan faktor Δx atau turunan lebih tinggi yang dinotasikan dengan

$O(\Delta x)$, diperoleh :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x). \tag{2.35}$$

Jika digunakan indeks i untuk menyatakan titik diskrit pada arah x, Persamaan (2.40) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial f}{\partial x} |_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x). \tag{2.36}$$

Persamaan (2.41) dikenal dengan metode eksplisit atau pendekatan beda maju *(Forward Finite Difference)* dengan orde Δx atau orde 1.

2.13.2 Pendekatan Beda Mundur

Selanjutnya dari Persamaan (2.38) ekspansi $f(x - \Delta x)$ terhadap x adalah :

$$f(x-\Delta x) = f(x) - (\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \\ ... + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(-\Delta x)^n}{n!}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x = f(x) - f(x-\Delta x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \\ ... - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \\ ... - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^{n-1}}{n!}. \tag{2.37}$$

Sehingga diperoleh $\frac{\partial f}{\partial x}$ sebagai berikut :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

atau

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ |_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x). \tag{2.38}$$

Persamaan (2.43) dikenal dengan metode implisit atau pendekatan beda mundur *(Backward Finite Difference)* dengan order Δx atau orde-1.

2.13.3 Pendekatan Orde Dua

Selanjutnya, setelah pendekatan orde satu untuk pendekatan beda maju dan pendekatan beda mundur telah didapatkan dengan penurunan yang didapatkan seperti pada Persamaan (2.39) dan (2.42) maka bisa didapatkan pula untuk pendekatan orde dua. Penurunan di bawah ini dimulai dengan mengambil persamaan orde satu dari pendekatan beda maju yang mengandung penurunan orde dua pada Persamaan (2.39). Fungsi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ dikeluarkan dan fungsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ nya diambil dari pendekatan beda mundur pada Persamaan (2.42) dengan penjabaran sebagai berikut :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\partial f}{\partial x}\right]\frac{2}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - (\frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}))\frac{2}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\frac{2}{\Delta x} - (\frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x})\frac{2}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{2}{\Delta x}$$

$$
\begin{aligned}
2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x^2} - 2\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x^2} - \frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{f(x+\Delta x)-2f(x)+f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

atau

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{\Delta x^2} \qquad (2.40)$$

2.14 Algoritma *Gaver-Stehfest*

Invers laplace diterapkan untuk mengubah harga saham di ruang Laplace kembali ke ruang aslinya. Algoritma Gaver-Stehfest adalah salah satu invers algoritma. Algoritma tersebut dipilih karena kesederhanaan dan kemudahan dalam penggunaannya sebagaimana tercantum sebagai berikut :

$$f(t) \approx \frac{ln(2)}{t}\sum_{n=1}^{N} K_n \hat{F}\left(\frac{nln(2)}{t}\right) \qquad (2.41)$$

$$K_n = (-1)^{\frac{N}{2}+n} \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{min(n,N/2)} \frac{k^{N/2}(2k)!}{(N/2-k)!k!(n-k)!(2k-n)!} \qquad (2.42)$$

dengan N adalah angka genap yang menunjukkan "*Stehfest number*", n adalah bilangan bulat, $1 \leq n \leq N$, dan k adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari sama dengan $\frac{(n+1)}{2}$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian terdiri atas lima tahap, antara lain: studi literatur, analisis masalah, tahap mencari solusi/ penyelesaian numerik model dengan transformasi Laplace, tahap mencari invers dari transformasi Laplace, tahap simulasi menggunakan *software* Matlab 2010a, dan penarikan kesimpulan dimana proses pengerjaan akan digambarkan pada Gambar 3.1

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pengumpulan literatur-literatur yang terkait dan berhubungan dengan persamaan *Black-Scholes*, transformasi Laplace, Persamaan difusi, opsi jual *European barrier up and in, up and out*, Metode Beda Hingga, algoritma *Gaver-Stehfest.*

3.2 Pengubahan Sistem PDP *Black-Scholes* Opsi Jual *European* ke dalam Bentuk Persamaan Difusi

Pada tahap ini, PDP *Black-Scholes* opsi jual *European* akan ditransformasi dengan $P(S,\tau) = e^{py+q\tau}w(y,\tau)$ untuk mendapatkan Persamaan difusi $\dfrac{\partial w(y,\tau)}{\partial \tau} = \dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}$. Tujuan dari pengubahan PDP *Black-Scholes* opsi jual *European* ke dalam Persamaan difusi adalah agar Persamaan tersebut dapat dibawa ke transformasi Laplace.

3.3 Transformasi Laplace PDP *Black-Scholes* Opsi jual *European Barrier up and in, up and out*

Selanjutnya, dilakukan transformasi Laplace dari Persamaan difusi untuk mendapatkan solusi yang nantinya akan diinverskan transformasi Laplace.

3.4 Pendekatan Beda Maju

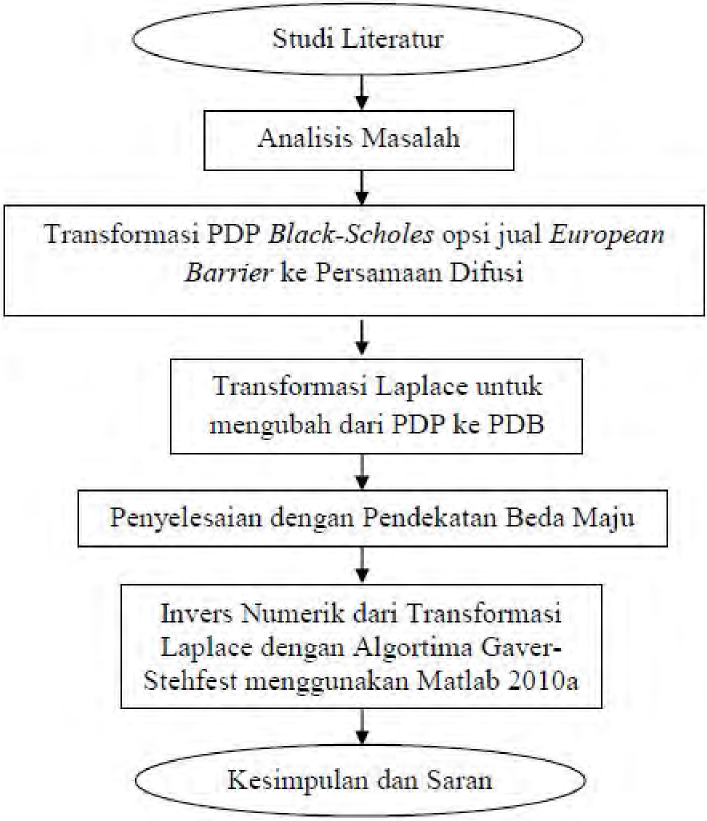
Metode beda hingga merupakan salah satu dari metode numerik yang dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial. Persamamaan Diferensial Biasa (PDB) juga dapat diselesaikan menggunakan Metode Beda Hingga yang mempunyai syarat batas dari suatu titik [8]. Pada persamaan difusi yang sudah di transformasikan Laplace didapatkan Persamaan Diferensial Biasa, dengan pendekatan beda maju pada Persamaan (4.43) didapatkan dua persamaan yaitu :
$\bar{w'}_{i+1} - \left(2 + \frac{(\Delta y^2)s}{v^2}\right)\bar{w'}_i + \bar{w'}_{i-1} = 0$ untuk $y > ln\frac{1}{b}$ dan
$\bar{w'}_{i+1} - \left(2 + \frac{(\Delta y^2)s}{v^2}\right)\bar{w'}_i + \bar{w'}_{i-1} = (\Delta y)^2 K(\frac{b(1-p)^2 e^{(1-p)y_i}}{s} - \frac{p^2 e^{-py_i}}{s})$ untuk $y < ln\frac{1}{b}$.

3.5 Invers Transformasi Laplace PDP *Black-Scholes* Opsi jual *European Barrier up and in, up and out* dengan Metode Invers Numerik dengan Algoritma *Gaver-Stehfest*

Selanjutnya, hasil yang masih dalam ruang Laplace di bawa ke invers numerik dengan menggunakan algoritma Gaver-Stehfest di *software* Matlab 2010a untuk mendapatkan grafik dari opsi jual *European barrier up and in, up and out.*

3.6 Penarikan Kesimpulan dan Saran

Dalam tahap akhir penelitian ini dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan mengenai solusi opsi jual *European Barrier up and in, up and out* menggunakan transformasi Laplace dan saran sebagai masukan pengembangan penelitian lebih lanjut.



Gambar 3.1: Diagram Alir Metodologi Penelitian

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada pengerjaan opsi jual *European Barrier up and in, up and out* dengan penyelesaian analitik dari PDP yang didapatkan dari transformasi Laplace, tidak didapatkan penyelesaiannya karena kendala kurangnya syarat batas yang dibutuhkan. Sehingga untuk menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul "Penyelesaian Opsi Jual *European Barrier up and in, up and out* Menggunakan Transformasi Laplace", penulis menggunakan penyelesaian numerik dengan pendekatan beda maju.

Pada bab ini dibahas mengenai penyelesaian numerik dari opsi jual *European Barrier up and in, up and out* yang akan diperoleh dari Persamaan Diferensial Parsial (PDP) *Black-Scholes* dengan dilakukan transformasi sehingga didapatkan Persamaan difusi dalam bentuk PDP yang akan diselesaikan dengan metode transformasi Laplace untuk merubah Persamaan difusi dari PDP ke PDB. Setelah didapatkan PDB dari transformasi Laplace kemudian akan didekati dengan pendekatan beda maju dan didapatkan nilai dalam ruang Laplace, selanjutnya akan dicari invers Laplace dengan metode Gaver-Stehfest yang merupakan penyelesaian numerik dari Tugas Akhir saya dan disimulasikan menggunakan *software* Matlab 2010a untuk mendapatkan grafik dari opsi tersebut.

4.1 Opsi Jual *European Barrier up and out*

Pada tahap ini akan dibahas mengenai numerik dari opsi jual *European Barrier up and out* dimana penyelesaian yang didapatkan akan diselesaikan dengan metode transformasi Laplace.

4.1.1 Persamaan Difusi dari Opsi Jual *European Barrier up and out*

Pada bagian ini dibahas tentang persamaan difusi untuk mendapatkan penyelesaian dari opsi jual *European Barrier up and out*. Diberikan persamaan *Black-Scholes* secara umum tanpa pembagian dividen adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial P(S,t)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P(S,t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P(S,t)}{\partial S} - rP(S,t). \quad (4.1)$$

Syarat batas yang digunakan adalah :

$$\begin{aligned} P(S=0,t) &= Ke^{-rt} && (4.2)\\ P(S,T) &= max(K-S,0) && (4.3)\\ P(S_{max},t) &= 0 && (4.4) \end{aligned}$$

diberikan transformasi :

$$\tau = T - t \quad (4.5)$$

$$\partial t = -\partial \tau. \quad (4.6)$$

Sehingga Persamaan (4.1) menjadi :

$$\frac{\partial P(S,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 P(S,\tau)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P(S,\tau)}{\partial S} - rP(S,\tau) \quad (4.7)$$

Syarat batas yang digunakan adalah :

$$\begin{aligned} P(S=0,\tau) &= Ke^{-r\tau} && (4.8)\\ P(S,\tau) &= max(K-S,0) && (4.9)\\ P(S_{max},\tau) &= 0 && (4.10) \end{aligned}$$

dengan $P(S,\tau)$ adalah nilai untuk opsi jual, r adalah suku bunga bebas resiko, σ adalah volatilitas, S adalah harga aset dasar, K adalah strike price, B adalah nilai barrier.

Untuk membatasi *barrier* eksponensial, digunakan transformasi variabel $y = ln\dfrac{S}{B_\tau}$ sehingga ketika nilai $S = B_\tau$ maka *barrier* menjadi berupa garis $y = 0$.
Diberikan transformasi :

$$y = ln\frac{S}{B_\tau} \tag{4.11}$$

$$B_\tau = bKe^{-\alpha\tau} \tag{4.12}$$

dimana $\alpha \geq 0$, $0 \leq b \leq 1$ karena $\alpha = 0$ maka,

$$B_\tau = bK \tag{4.13}$$

sehingga,

$$y = ln\frac{S}{bK} \tag{4.14}$$

$$e^y = \frac{S}{bK} \tag{4.15}$$

$$S = bKe^y \tag{4.16}$$

Dilakukan transformasi pada Persamaan (4.7) dengan menggunakan Persamaan (4.14), didapatkan :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial S} &= \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S} \\ &= \frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{bK}\frac{1}{\frac{S}{bK}} \\ &= \frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{S} \\ &= \frac{1}{S}\frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\partial P}{\partial S}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S}\right]\frac{\partial y}{\partial S} \\
&= \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial S} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S}\right]\frac{\partial y}{\partial S} \\
&= \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\left[\frac{\partial y}{\partial S}\right]^2 + \frac{\partial P}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial S^2}\right] \\
&= \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\frac{1}{S^2} + \frac{\partial P}{\partial y}\left(-\frac{1}{S^2}\right) \\
&= \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{1}{S^2}\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Jadi Persamaan Diferensial Parsial *Black-Scholes* tanpa dividen setelah ditransformasikan menjadi :

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial P}{\partial y} - rP. \qquad (4.19)$$

Syarat batas yang digunakan adalah :

$$\begin{aligned}
P(y=0,\tau) &= Ke^{-r\tau} \qquad (4.20) \\
P(y,0) &= max(K - bKe^y, 0) \\
&= max((1-be^y)K, 0) \qquad (4.21) \\
P(ymax,\tau) &= 0 \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Diberikan transformasi sebagai berikut :

$$P(y,\tau) = e^{py+q\tau}w(y,\tau) \qquad (4.23)$$

Selanjutnya akan dicari turunan $\dfrac{\partial P}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ dari Persamaan (4.23) sehingga didapat :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(e^{py+q\tau}w(y,\tau)\right)\\ &= qe^{py+q\tau}w(y,\tau)+e^{py+q\tau}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial \tau} \qquad (4.24)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{py+q\tau}w(y,\tau)\right)\\ &= pe^{py+q\tau}w(y,\tau)+e^{py+q\tau}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y} \qquad (4.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(pe^{py+q\tau}w(y,\tau)+e^{py+q\tau}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}\right)\\ &= ppe^{py+q\tau}w(y,\tau)+pe^{py+q\tau}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}\\ &\quad +pe^{py+q\tau}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}+e^{py+q\tau}\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}\\ &= p^2e^{py+q\tau}w(y,\tau)+2pe^{py+q\tau}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}\\ &\quad +e^{py+q\tau}\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}. \qquad (4.26)\end{aligned}$$

Selanjutnya setelah didapatkan hasil turunan pada Persamaan (4.24)-(4.26) kemudian disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.19) untuk memperoleh Persamaan umum dari opsi jual *European Barrier up and out*. Langkah selanjutnya akan dijabarkan sebagai berikut :

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial P}{\partial y} - rP$$

$$qe^{py+q\tau}w(y,\tau) + e^{py+q\tau}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}p^2 e^{py+q\tau}w(y,\tau) + 2pe^{py+q\tau}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y} + e^{py+q\tau}\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})pe^{py+q\tau}w(y,\tau) + e^{py+q\tau}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y} - re^{py+q\tau}w(y,\tau),$$

$$e^{py+q\tau}\left(qw(y,\tau) + \frac{\partial w(y,\tau)}{\partial \tau}\right) = e^{py+q\tau}(\frac{\sigma^2}{2}(p^2 w(y,\tau) + 2p\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y} + \frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})pw(y,\tau) + \frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y} - rw(y,\tau)),$$

$$qw(y,\tau) + \frac{\partial w(y,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2}(p^2 w(y,\tau) + 2p\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y} + \frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})pw(y,\tau) + \frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y} - rw(y,\tau),$$

$$qw(y,\tau) + \frac{\partial w(y,\tau)}{\partial \tau} = \left(\frac{\sigma^2}{2}p^2 - r + p(r - \frac{\sigma^2}{2})\right)w(y,\tau) + \frac{\sigma^2}{2}2p\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y} + \frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}.$$

Digunakan pemisalan sebagai berikut untuk mendapatkan nilai p:

$$q = \frac{\sigma^2}{2}p^2 - r + p(r - \frac{\sigma^2}{2}). \tag{4.27}$$

Terdapat dua variabel p dan q pada Persamaan (4.27) sehingga untuk mendapatkan nilai p ruas yang mengandung variabel q di nol kan, maka :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial p} &= 2p\frac{\sigma^2}{2} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \\
0 &= 2p\frac{\sigma^2}{2} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \\
0 &= \frac{\sigma^2}{2}(2p - 1) + r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{2}(2p - 1) &= -r \\
2p &= 1 + (-\frac{2r}{\sigma^2}) \\
p &= \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Setelah didapatkan nilai p, selanjutnya akan disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.27) untuk mendapatkan nilai dari q dengan penjabaran sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\sigma^2}{2}p^2 - r + p(r - \frac{\sigma^2}{2}) \\
&= \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)^2 - r + \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}\right)(r - \frac{\sigma^2}{2}) \\
&= \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2r}{2\sigma^2} + \frac{r^2}{\sigma^4}\right) - r + \frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4} - \frac{r^2}{\sigma^2} + \frac{r\sigma^2}{2\sigma^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{8} - \frac{\sigma^2 r}{2\sigma^2} + \frac{r^2\sigma^2}{2\sigma^4} - r + r - \frac{\sigma^2}{4} - \frac{r^2}{\sigma^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{8} - \frac{r}{2} + \frac{r^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{4} - \frac{r^2}{\sigma^2} \\
&= -\frac{\sigma^2}{8} - \frac{r^2}{2\sigma^2} - \frac{r}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2q &= -\frac{\sigma^2}{4} - \frac{r^2}{\sigma^2} - r \\
2q &= -\sigma^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{r^2}{\sigma^4} + \frac{r}{\sigma^2} \right) \\
2q &= -\sigma^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2q &= -\sigma^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{r}{\sigma^2} + \frac{r^2}{\sigma^4} + \frac{2r}{\sigma^2} \right) \\
2q &= -\sigma^2 \left(p^2 + \frac{2r}{\sigma^2} \right) \\
2q &= -\sigma^2 \left(\frac{p^2\sigma^2 + 2r}{\sigma^2} \right) \\
q &= -\frac{p^2\sigma^2}{2} - r. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

Hasil yang didapatkan pada Persamaan (4.28) dan (4.29) akan disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.23) untuk memperoleh nilai dari $P(y,\tau)$, dengan diketahui bahwa :

$$P(y,\tau) = e^{py+q\tau} w(y,\tau).$$

Sehingga didapatkan Persamaan umum untuk opsi jual *European Barrier up and out* sebagai berikut :

$$P(y,\tau) = e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y - (\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau} w(y,\tau). \qquad (4.30)$$

Kemudian akan dicari turunan dari $\dfrac{\partial P}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ dari Persamaan (4.30) untuk mendapatkan model yang sederhana

:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau} w(y,\tau)\right) \\
&= e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau}(-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)w(y,\tau) \\
&\quad +\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial \tau})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau} w(y,\tau)\right) \\
&= e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau}((\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})w(y,\tau) + \\
&\quad \frac{\partial w(y,\tau}{\partial y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P(y,\tau)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau}((\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})w(y,\tau) \\
&\quad +\frac{\partial w(y,\tau}{\partial y})) \\
&= (\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})^2 e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau} w(y,\tau) + 2(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})
\end{aligned}$$

$$e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}+e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau}$$
$$\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}$$

$$= \quad e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau}((\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})^2 w(y,\tau)+2(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})$$
$$\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}+\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}).$$

Setelah didapatkan turunan $\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial \tau}, \frac{\partial P(y,\tau)}{\partial y}, \frac{\partial^2 P(y,\tau)}{\partial y^2}$, selanjutnya akan dilakukan substitusi ke dalam Persamaan (4.19) sehingga diperoleh :

$$e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau}\left(-\left(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r\right)w(y,\tau)+\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial \tau}\right)=$$
$$\frac{\sigma^2}{2}e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau}((\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})^2 w(y,\tau)+2(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}+$$
$$\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2})+(r-\frac{\sigma^2}{2})e^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau}((\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})w(y,\tau)+$$
$$\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y})-re^{(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})y-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)\tau}w(y,\tau),$$

$$(-(\frac{p^2\sigma^2}{2}+r)w(y,\tau)+\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial \tau})=\frac{\sigma^2}{2}((\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})^2 w(y,\tau)$$
$$+2(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}+\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2})+(r-\frac{\sigma^2}{2})((\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})w(y,\tau)$$
$$+\frac{\partial w(y,\tau}{\partial y})-rw(y,\tau),$$

$$-\frac{p^2\sigma^2}{2}w(y,\tau)+\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\sigma^2}{2}(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})^2w(y,\tau)+\frac{\sigma^2}{2}2(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})$$
$$\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}+r(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})w(y,\tau)-\frac{\sigma^2}{2}(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})$$
$$w(y,\tau)+r\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y},$$

$$-\frac{p^2\sigma^2}{2}w(y,\tau)+\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\sigma^2}{2}(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})^2w(y,\tau)+r(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})$$
$$w(y,\tau)-\frac{\sigma^2}{2}(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})w(y,\tau)+\frac{\sigma^2}{2}2(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}+r\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}$$
$$-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}$$

$$-\frac{\sigma^2}{8}w(y,\tau)+\frac{\sigma^2 r}{2\sigma^2}w(y,\tau)-\frac{\sigma^2 r^2}{2\sigma^4}w(y,\tau)+\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\sigma^2}{2}(\frac{1}{4}-\frac{2r}{\sigma^2}$$
$$+\frac{r^2}{\sigma^4})w(y,\tau)+(\frac{r}{2}-\frac{r^2}{\sigma^2})w(y,\tau)-\frac{\sigma^2}{2}(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})w(y,\tau)+\sigma^2(\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2})$$
$$\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}+r\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial y}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}$$

$$-\frac{\sigma^2}{8}w(y,\tau)+\frac{r}{2}w(y,\tau)-\frac{r^2}{2\sigma^2}w(y,\tau)+\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial\tau}=-\frac{\sigma^2}{8}w(y,\tau)-$$
$$\frac{r^2}{2\sigma^2}w(y,\tau)+\frac{r}{2}w(y,\tau)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial w(y,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 w(y,\tau)}{\partial y^2} \tag{4.31}$$

Dengan syarat batas yang digunakan adalah :

$$\begin{aligned} w(0,\tau) &= Ke^{-(r+q)\tau} && (4.32) \\ w(y,0) &= max((1-be^{y})K,0)e^{-py} \\ &= max(Ke^{-py}-Kbe^{(1-p)y},0) && (4.33) \\ w(ymax,\tau) &= 0 && (4.34) \end{aligned}$$

Terlihat bahwa Persamaan (4.31) merupakan Persamaan difusi.

4.1.2 Shifting Function

Pergeseran fungsi atau *Shifting Function* di sini diperuntukkan agar syarat batas $w(y,0) = 0$. Sehingga didapatkan persamaan *Shifting Function* sebagai berikut :

$$w' = \begin{cases} w - Ke^{-py} + Kbe^{(1-p)y}, & \text{untuk y} < \ln(1/\text{b}) \\ w, & \text{untuk y} > \ln(1/\text{b}). \end{cases} \quad (4.35)$$

$$w = w' + Ke^{-py} - Kbe^{(1-p)y} \quad (4.36)$$

Selanjutnya akan dicari $\dfrac{\partial w}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ yang akan dijabarkan sebagai berikut :

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial w'}{\partial \tau} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w'}{\partial y} - pKe^{-py} - Kb(1-p)e^{(1-p)y} && (4.38) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + p^2Ke^{-py} - (1-p)^2Kbe^{(1-p)y}. && (4.39) \end{aligned}$$

Persamaan $\frac{\partial w}{\partial \tau}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ yang didapat kemudian di substitusikan ke Persamaan difusi pada Persamaan (4.31) sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \tau} &= \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\frac{\partial w'}{\partial \tau} &= \frac{\sigma^2}{2}(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + p^2Ke^{-py} - (1-p)^2Kbe^{(1-p)y}) \\
\frac{\partial w'}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} &= \frac{\sigma^2}{2}p^2Ke^{-py} - \frac{\sigma^2}{2}(1-p)^2Kbe^{(1-p)y}. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Terdapat dua fungsi ketika $y < ln(\frac{1}{b})$ dan $y > ln(\frac{1}{b})$ dengan memisalkan $\frac{\sigma^2}{2} = v^2$ yakni sebagai berikut :

1. Untuk $y < ln(\frac{1}{b})$

$$\begin{cases}
\frac{\partial w'}{\partial \tau} - v^2\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = v^2p^2Ke^{-py} - \\
v^2(1-p)^2Kbe^{(1-p)y} \\
\\
w'(0,\tau) = w - Ke^{-py} + Kbe^{(1-p)y} \\
= Ke^{-(r+q)\tau} - Ke^{-py} + Kbe^{(1-p)y} \\
w'(y,0) = w - Ke^{-py} + Kbe^{(1-p)y} \\
= Ke^{-py} + Kbe^{(1-p)y} - (Ke^{-py} + Kbe^{(1-p)y}) \\
= 0
\end{cases} \quad (4.41)$$

2. Untuk $y > ln(\frac{1}{b})$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w'}{\partial \tau} - v^2 \dfrac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = 0 \\ \\ w'(y,0) = w(y,0) \\ = Ke^{-py} + Kbe^{(1-p)y} \\ w'(ymax,\tau) = 0 \end{cases} \tag{4.42}$$

4.1.3 Transformasi Laplace Opsi Jual *European Barrier up and out*

Pada bagian ini dibahas tentang penyelesaian Persamaan difusi dengan *Shifting Function* tanpa *rebate* untuk mendapatkan solusi dari opsi jual *European Barrier up and out* menggunakan transformasi Laplace. Pada opsi jual *European Barrier up and out* fungsi yang berlaku yakni pada Persamaan (4.41) dengan syarat $y < ln(\frac{1}{b})$ karena nilai pada opsi tersebut berlaku diantara syarat batas $w'(0,\tau) = Ke^{-(r+q)\tau} - Ke^{-py} + Kbe^{(1-p)y}$ dan $w'(y,0) = 0$. Diberikan Persamaan difusi dengan tanpa *rebate* yang akan dilakukan transformasi Laplace adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial w'}{\partial \tau} - v^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = v^2 p^2 Ke^{-py} - v^2(1-p)^2 Kbe^{(1-p)y}$$

Syarat batas tanpa *rebate* yang digunakan adalah :

$$\begin{aligned} w'(0,\tau) &= Ke^{-(r+q)\tau} - Ke^{-py} + Kbe^{(1-p)y} \\ w'(y,0) &= 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan menggunakan transformasi di atas akan dilakukan transformasi Laplace, dimana:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \mathcal{L}s\{w(y,\tau)\} \\ \mathcal{L}s\{w(y,\tau)\} &= s\mathcal{L}s\{w(y,\tau)\} - w(y,0) \end{aligned}$$

dengan $\mathcal{L}s$ adalah operator Laplace, $\bar{w}$ adalah transformasi Laplace dengan parameter s [6], sehingga penjabaran dari transformasi Laplace adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{\partial w'(y,\tau)}{\partial \tau}\right) - \mathcal{L}\left(v^2\frac{\partial^2 w'(y,\tau)}{\partial y^2}\right) &= \mathcal{L}(v^2p^2Ke^{-py} \\
&\quad -v^2(1-p)^2Kbe^{(1-p)y}) \\
s\mathcal{L}s\left(w'(y,\tau)\right) - w'(y,0) - v^2\mathcal{L}\frac{\partial^2 w'(y,\tau)}{\partial y^2} &= \mathcal{L}(v^2p^2Ke^{-py} \\
&\quad -v^2(1-p)^2Kbe^{(1-p)y})
\end{aligned}$$

$$s\bar{w}' - v^2\frac{\partial^2 \bar{w}'}{\partial y^2} = \frac{v^2p^2Ke^{-py} - v^2(1-p)^2Kbe^{(1-p)y}}{s} \tag{4.43}$$

dengan syarat batas yang digunakan adalah :

$$\begin{aligned}
w'(\bar{0},\tau) &= \mathcal{L}\left(Ke^{-(r+q)\tau} - Ke^{-py} + Kbe^{(1-p)y}\right) \\
&= \frac{K}{(r+q+s)} - \frac{Ke^{-py}}{s} + \frac{Kbe^{(1-p)y}}{s} \\
w'(\bar{y},0) &= 0.
\end{aligned}$$

Setelah dilakukan transformasi Laplace, langkah selanjutnya adalah Persamaan (4.43) untuk opsi jual *European Barrier up and out* akan didekati dengan metode numerik pendekatan beda maju untuk mendapatkan nilai dalam ruang Laplace.

4.1.4 Metode Beda Hingga Opsi Jual *European Barrier up and out*

Persamaan opsi jual *European Barrier up and out* yang telah ditransformasi Laplace akan didekati dengan pendekatan beda maju yang akan dijabarkan sebagai berikut :

$$s\bar{w}' - v^2\frac{\partial^2 \bar{w}'}{\partial y^2} = \frac{v^2p^2Ke^{-py} - v^2(1-p)^2Kbe^{(1-p)y}}{s} \tag{4.44}$$

Pendekatan beda hingga untuk Persamaan (4.44) adalah sebagai berikut :

$$s\bar{w'_i} - v^2\left(\frac{\bar{w'_{i+1}} - 2\bar{w'_i} + \bar{w'_{i-1}}}{\Delta y^2}\right) = \frac{v^2p^2Ke^{-py_i}}{s}$$
$$\frac{-v^2(1-p)^2Kbe^{(1-p)y_i}}{s}$$

$$-\frac{s\bar{w'_i}\Delta y^2}{v^2} + \left(\bar{w'_{i+1}} - 2\bar{w'_i} + \bar{w'_{i-1}}\right) = \frac{-v^2(\Delta y)^2K}{v^2}$$
$$(\frac{p^2e^{-py_i} - (1-p)^2be^{(1-p)y_i}}{s})$$

$$\bar{w'_{i+1}} - 2\bar{w'_i} - \frac{s\bar{w'_i}\Delta y^2}{v^2} + \bar{w'_{i-1}} = -(\Delta y)^2K(\frac{p^2e^{-py_i}}{s}$$
$$\frac{-(1-p)^2be^{(1-p)y_i}}{s})$$

$$\bar{w'_{i+1}} - \left(2 + \frac{(\Delta y^2)s}{v^2}\right)\bar{w'_i} + \bar{w'_{i-1}} = (\Delta y)^2K$$
$$(\frac{b(1-p)^2e^{(1-p)y_i} - p^2e^{-py_i}}{s}) \tag{4.45}$$

Pada Persamaan (4.45) di atas, selanjutnya akan dilakukan perhitungan opsi jual *European Barrier up and out* dengan invers numerik *Gaver-Stehfest.*

4.1.5 Invers Numerik Algoritma *Gaver-Stehfest*

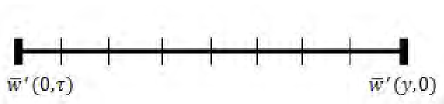
Invers numerik algoritma *Gaver-Stehfest* digunakan untuk menghitung nilai dari fungsi invers Laplace. Pada Persamaan (4.45) akan dicari nilai dari invers Laplace yang telah didekati dengan pendekatan beda maju.

$$\bar{w'_{i+1}} - \left(2 + \frac{(\Delta y^2)s}{v^2}\right)\bar{w'_i} + \bar{w'_{i-1}} = (\Delta y)^2 K$$
$$\left(\frac{b(1-p)^2 e^{(1-p)y_i} - p^2 e^{-py_i}}{s}\right)$$

dengan syarat batas yang digunakan adalah :

$$\begin{aligned} w'(\bar{0}, \tau) &= \frac{K}{(r+q+s)} - \frac{Ke^{-py}}{s} + \frac{Kbe^{(1-p)y}}{s} \\ w'(\bar{y}, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Karena opsi jualnya adalah *Barrier up and out* maka berlaku $K > B_\tau$. Selanjutnya akan dicari nilai invers per titik dari masing-masing fungsi yang mengandung variabel Laplace. Nilai parameter yang digunakan dalam perhitungan adalah sebagai berikut :
K=50; b=0,8; B_τ=40; r=0,03; σ= 0,1; p=-2,5; q=-0,28125; τ=0,333.



Gambar 4.1: Pembagian *grid* dengan $n = 7$

Perhitungan dengan invers numerik *Gaver-Stehfest* pada Gambar (4.1) adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} S = 0 \longrightarrow w'(\bar{0}, \tau) &= \frac{K}{(r+q+s)} - \frac{Ke^{-py}}{s} + \frac{Kbe^{(1-p)y}}{s} \\ \bar{w'} &= 54,3638 \end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} S = B_\tau = bK = 40 \longrightarrow w'(\bar{y}, 0) &= 0 \\ \bar{w'} &= 0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Pada Gambar (4.1) akan dilakukan perhitungan nilai $w'(y)$ diantara nilai $S = 0$ sampai $S = B_\tau = 40$, maka didapatkan nilai y untuk batas bawah sebagai berikut :

$$y = ln\left(\frac{S}{B_\tau}\right) = ln\left(\frac{0,1}{40}\right) = -5,9914 \tag{4.48}$$

Nilai pada $S = 0$ akan menyebabkan nilai y tak terdefinisi oleh karena itu diambil pendekatan nilai $S = 0$ dengan nilai $S = 0,1$ pada perhitungan y di atas. Sehingga didapatkan nilai $y = -5,9914$ untuk $S = 0,1$. Sedangkan untuk nilai y sebagai batas atas dengan nilai $S = 40$ adalah sebagai berikut :

$$y = ln\left(\frac{S}{B_\tau}\right) = ln\left(\frac{40}{40}\right) = 0 \tag{4.49}$$

Untuk mencari nilai di antara $w'(0,\tau)$ dan $w'(y,0)$ pada Gambar (4.1) ini dihitung dengan pembagian *grid* $n = 7$ sehingga didapatkan nilai Δy dari nilai batas atas dikurang nilai batas bawah adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{0 - (-5,9914)}{7} \\ &= 0,85591 \end{aligned} \tag{4.50}$$

untuk $n = 7$ maka didapatkan :

$$\begin{aligned} i = 1 \longrightarrow y_1 &= -5,9914 \\ i = 2 \longrightarrow y_2 &= y_1 + \Delta y = -5,13549 \\ i = 3 \longrightarrow y_3 &= y_2 + \Delta y = -4,27958 \\ i = 4 \longrightarrow y_4 &= y_3 + \Delta y = -3,42367 \\ i = 5 \longrightarrow y_5 &= y_4 + \Delta y = -2,56776 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
i = 6 \longrightarrow y_6 &= y_5 + \Delta y = -1,71185 \\
i = 7 \longrightarrow y_7 &= y_6 + \Delta y = -0,85591 \\
i = 8 \longrightarrow y_8 &= y_7 + \Delta y = 0.
\end{aligned}
$$

Nilai y_i yang diperoleh tersebut akan disubstitusikan ke fungsi di bawah ini :
dengan memisalkan,

$$
C = (\Delta y)^2 K(\frac{b(1-p)^2 e^{(1-p)y_i} - p^2 e^{-py_i}}{s}) \tag{4.51}
$$

Selanjutnya akan dilakukan invers numerik algoritma *Gaver-Stehfest* per masing-masing titik didapatkan hasil sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \Delta y = -4,27958 \longrightarrow ilt = -6,02x10^{-4} \\
y_3 &= y_2 + \Delta y = -3,42367 \longrightarrow ilt = -0,0051 \\
y_4 &= y_3 + \Delta y = -3,42367 \longrightarrow ilt = -0,0417 \\
y_5 &= y_4 + \Delta y = -2,56776 \longrightarrow ilt = -0,3282 \\
y_6 &= y_5 + \Delta y = -1,71185 \longrightarrow ilt = -2,2728 \\
y_7 &= y_6 + \Delta y = -0,85591 \longrightarrow ilt = -8,9919.
\end{aligned}
$$

dengan *ilt* adalah *inverse Laplace transform.*

Kemudian, dengan nilai $\Delta y = 1,9971$ juga dilakukan invers numerik algoritma *Gaver-Stehfest* pada fungsi di bawah ini dengan hasil sebagai berikut : dengan memisalkan,

$$
D = 2 + \frac{(\Delta y^2)s}{v^2} \longrightarrow ilt = -211,6057. \tag{4.52}
$$

Dengan nilai invers yang sudah didapatkan per masing-masing titik, selanjutnya akan dilakukan perhitungan pendekatan beda maju pada Persamaan (4.45) sebagai berikut :

$$\bar{w}'_{i+1} - \left(2 + \frac{(\Delta y^2)s}{v^2}\right)\bar{w}'_i + \bar{w}'_{i-1} = (\Delta y)^2 K\left(\frac{b(1-p)^2 e^{(1-p)y_i}}{s} - \frac{p^2 e^{-py_i}}{s}\right)$$

misal,

$$A.B = C$$

maka untuk mencari nilai B adalah sebagai berikut :

$$B = A^{-1}.C$$

diberikan nilai matriks A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -211{,}6057 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -211{,}6057 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -211{,}6057 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -211{,}6057 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -211{,}6057 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -211{,}6057 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

maka nilai dari matriks A^{-1} adalah :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0047 & -0{,}0047 & -2{,}2334x10^{-5} & 0 & -4{,}9980x10^{-10} & -2{,}3573x10^{-12} & -1{,}1139x10^{-14} & 1{,}1139x10^{-14} \\ 2{,}2334x10^{-5} & -2{,}2334x10^{-5} & -0{,}0047 & -2{,}2334x10^{-5} & -1{,}0554x10^{-7} & -4{,}9980x10^{-10} & -2{,}3573x10^{-12} & 2{,}3573x10^{-12} \\ 1{,}0554x10^{-7} & -1{,}0554x10^{-7} & -2{,}2334x10^{-5} & -0{,}0047 & -2{,}2334x10^{-5} & -1{,}0554x10^{-7} & -4{,}9980x10^{-10} & 4{,}9980x10^{-10} \\ 4{,}9980x10^{-10} & -4{,}9980x10^{-10} & -1{,}0554x10^{-7} & -2{,}2334x10^{-5} & -0{,}0047 & -2{,}2334x10^{-5} & -1{,}0554x10^{-7} & 1{,}0554x10^{-7} \\ 2{,}3573x10^{-12} & -2{,}3573x10^{-12} & -4{,}9980x10^{-10} & -1{,}0554x10^{-7} & -2{,}2334x10^{-5} & -0{,}0047 & -2{,}2334x10^{-5} & 2{,}2334x10^{-5} \\ 1{,}1139x10^{-14} & -1{,}1139x10^{-14} & -2{,}3573x10^{-12} & -4{,}9980x10^{-10} & 1{,}0554x10^{-7} & -2{,}2334x10^{-5} & -0{,}0047 & 0{,}0047 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \\ w'_4 \\ w'_5 \\ w'_6 \\ w'_7 \\ w'_8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 54,3638 \\ -6,02x10^{-4} \\ -0,0051 \\ -0,0417 \\ -0,3282 \\ -2,2728 \\ -8,9919 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = A^{-1}.C$

maka nilai dari B adalah :

$$B = \begin{pmatrix} 54,3638 \\ 0,2569 \\ 0,0012 \\ 2,10x10^{-4} \\ 1,60x10^{-3} \\ 1,09x10^{-2} \\ 0,0425 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jadi, didapatkan nilai opsi jual *European Barrier up and out* adalah :

$$w_i' = \begin{pmatrix} 54,3638 \\ 0,2569 \\ 0,0012 \\ 2,10x10^{-4} \\ 1,60x10^{-3} \\ 1,09x10^{-2} \\ 0,0425 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Telah didapatkan nilai dari w_i' yang masih berada dalam ruang non-dimensional *shifting function* selanjutnya nilai w_i' tersebut akan dikembalikan ke ruang w_i lalu dari ruang w_i akan dikembalikan ke ruang P_i.

Langkah pertama yaitu nilai dari w_i' dikembalikan ke ruang w_i dengan Persamaan (4.53) :

$$w_i = w_i' + Ke^{-py} - Kbe^{(1-p)y} \tag{4.53}$$

maka didapatkan nilai w_i

$$w_i = \begin{pmatrix} 54,3638156 \\ 0,257051722 \\ 0,002355169 \\ 0,009549351 \\ 0,078085239 \\ 0,603343118 \\ 3,926516769 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya untuk mencari nilai dari P_i yaitu nilai dari w_i dikembalikan ke ruang P_i dengan Persamaan (4.54) :

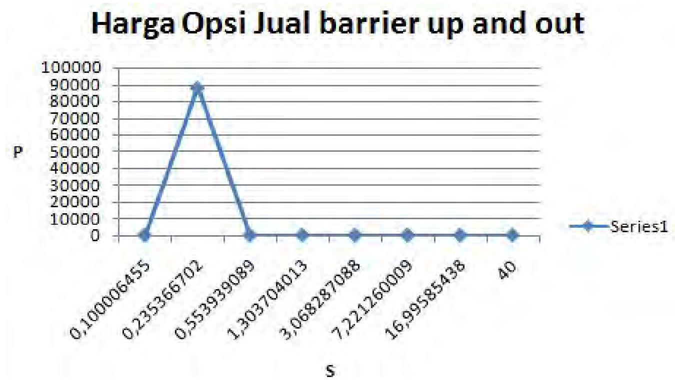
$$P(y,\tau) = e^{py+q\tau} w \tag{4.54}$$

didapatkan nilai P_i sebagai berikut :

$$P_i = \begin{pmatrix} 49,49881738 \\ 88123,72212 \\ 95,01711383 \\ 45,3378818 \\ 43,62785215 \\ 39,67041813 \\ 30,37979394 \\ 0 \end{pmatrix}$$

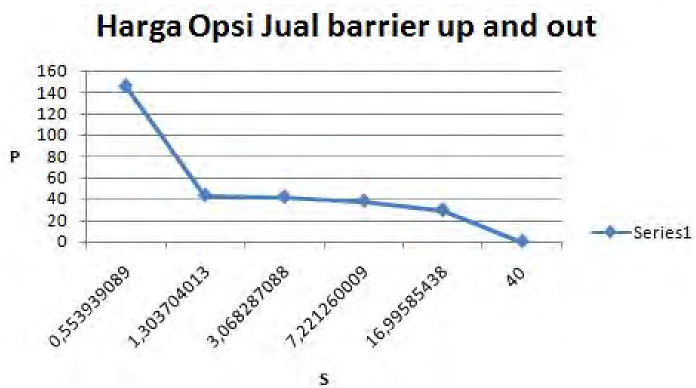
Telah didapatkan nilai P_i yang merupakan harga opsi jual *European Barrier up and out* dengan parameter yang digunakan dalam perhitungan adalah :
K=50; b=0,8; B_τ=40; r=0,03; σ= 0,1; p=-2,5; q=-0,28125; τ=0,333.

Dengan nilai P_i yang telah didapatkan, maka plot grafiknya adalah sebagai berikut :



Gambar 4.2: Nilai Opsi Jual *European Barrier up and out* dengan r=0.03

Plot nilai P_3 sampai P_8 adalah sebagai berikut :



Gambar 4.3: Nilai Opsi Jual *European Barrier up and out* dengan r=0.03

Pada Gambar 4.2 nilai dari opsi jual *Barrier up and out* mengalami kenaikan pada nilai P_2 ke nilai P_3 lalu mengalami penurunan setelah nilai P_3 dan nilai opsi $P = 0$ ketika $S = 40$.

4.2 Opsi Jual *European Barrier up and in* dengan *Put-Call barrier Parity*

Nilai dari harga opsi jual *European Barrier up and in* dapat diperoleh dari *put call barrier parity.* Dengan *put call barrier parity* akan didapatkan nilai dari harga opsi jual *European Barrier up and in* dengan mengurangkan nilai dari opsi jual vanilla dan nilai dari harga opsi jual *European barrier up and out.* Nilai opsi jual vanilla adalah sebagai berikut :

$$P(S,\tau) = Ke^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{4.55}$$

dengan,

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\tau}\sigma\sqrt{\tau}$$
$$d_2 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\tau}\sigma\sqrt{\tau}.$$

Put Barrier Parity harga opsi jual *European* adalah :

$$P_{vanilla} = P_{ui} + P_{uo} \tag{4.56}$$

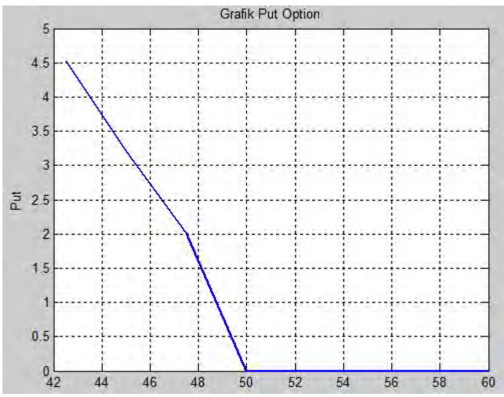
dengan, S adalah harga saham, K adalah *strike price*, r adalah *interest rate*, t adalah waktu opsi, T waktu hidup opsi, $\tau = T - t$, $P(S,\tau)$ adalah harga opsi jual, P_{ui} adalah harga opsi jual *up and in*, P_{uo} adalah harga opsi jual *up and out.*

Akan diambil nilai,
K=50; b=0,8; B_τ=40; r=0,03; σ= 0,1; p=-2,5; q=-0,28125; τ=0,333.

Untuk nilai dari opsi jual *European Barrier up and in* adalah berada di antara nilai *barrier* $< w(y) \leq K$ dikarenakan pada nilai $S < B_\tau$ harga opsinya bernilai 0. Sehingga nilai dari opsi jual *European Barrier up and in* dengan perhitungan *software* Matlab 2010a untuk nilai $S = 42.5 : 2.5 : 60$ adalah sebagai berikut :

$$P(y) = \begin{pmatrix} 4,5307 \\ 3,2151 \\ 2,126 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga plot grafik pada $P(y,\tau)$ opsi jual *European Barrier up and in* adalah sebagai berikut :



Gambar 4.4: Nilai Opsi Jual *European Barrier up and in* dengan r=0.03

Pada Gambar 4.4 nilai opsi jual *Barrier up and in* diambil dari pengurangan opsi jual vanilla dan opsi jual *Barrier up and out.* Nilai S yang diambil mulai dari nilai $S > 40$ atau setelah nilai S mencapai *barrier* dan grafik menunjukkan penurunan.

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Telah didapatkan Persamaan Diferensial Biasa dari transformasi Laplace akan tetapi untuk penyelesaian analitik tidak didapatkan sehingga Persamaan Diferensial Biasa dari transformasi Laplace diselesaikan dengan penyelesaian numerik yaitu pendekatan beda maju dan diperoleh harga opsi jual *European Barrier up and out* serta invers transformasi Laplace dari algoritma *Gaver-Stehfest*.

2. Nilai invers yang didapatkan dari algoritma *Gaver-Stehfest* di *software* Matlab 2010a diperoleh nilai dari opsi jual *European Barrier up and out* yang mengalami kenaikan pada nilai P_2 ke nilai P_3 lalu mengalami penurunan setelah nilai P_3 dan bernilai nol ketika harga saham sama dengan nilai *barrier* atau nilai opsi $P = 0$ ketika $S = 40$.

3. Diperoleh hubungan *put-call barrier parity* :

$$P_{vanilla} = P_{ui} + P_{uo} \tag{5.1}$$

dengan $P_{vanilla}$ adalah harga opsi jual vanilla, P_{ui} adalah harga opsi jual *up and in*, dan P_{uo} adalah harga opsi jual *up and out*, yang menunjukkan bahwa nilai opsi jual *European Barrier up and in* dengan *strike price* dan waktu jatuh tempo tertentu dapat diperoleh dari pengurangan nilai opsi jual vanilla dengan nilai opsi jual *European Barrier up and out* dengan *strike price* dan waktu jatuh tempo yang sama, dan berlaku sebaliknya.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini belum dijelaskan solusi numerik opsi jual *European Barrier up and in, up and out* disertai dividen. Serta *grid* yang digunakan juga masih terbatas. Oleh sebab itu, penulis menyarankan agar penelitian dapat dilanjutkan pada pembahasan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Willmot, P., Howiston, S., Dewynne, J. (1995). **The Mathematics of Financial Derivatives**. Press Syndicate of the Cambridge University, New York.

[2] Willmot, P., Wiley, J. (2007). **Introduces Quantitative Finance**. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, England.

[3] Rachman, A. (2008). **Penentuan Nilai Barrier Option Tipe Eropa dan Amerika**. ITB : Library Institute Technology Bandung. Bandung.

[4] Black, F.,Scholes, M. (1973). **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. *The Journal of Political Economy.* Vol. 81, No. 3, Hal. 637-654.

[5] Lee, H., Sheen, D. (2009). **Laplace Transformation Method for the Black-Scholes Equation**.*International Journal of Numerical Analysis and Modeling* Vol. 6, No. 4, Hal. 000-001.

[6] Kumar, S.S.S. (2008). **Financial Derivatives**. Hal. 227-235. PHI Learning Pvt. Ltd. New Delhi

[7] Alobaidi, G., Mallier, R., dan Mansi, S. (2011). **Laplace Transforms and Shout Options**. Acta Math Univ.Comenianae Vol. LXXX, Hal. 79-102.

[8] Kaw, A., Nguyen, C., dan Snyder, L. (2012). **Finite Difference Methods of Solving Ordinary**

Differential Equations. General Enginering University of South Florida. FLorida.

[9] Pratiwi, N. (2015). **Penyelesaian Persamaan Black-Scholes Dengan Adomian Decomposition Method**. ITS. Surabaya.

[10] Hull, J. C. (2002). **Option Futures and Other Derivatives**. *Seventh Edition*. Prentice Hall, New Jersey.

[11] Hoffman, K. A dan Chiang, S. T. (2000). **Computational Fluid Dynamics**. Vol. I. Edisi ke empat. Wichita EES, USA.

[12] Darmianti, R. (2013). **Penentuan Harga Barrier dengan Metode Beda Hingga Eksplisit dan Implisit [Skripsi]**. UNHAS. Makassar.

[13] Syamsuddin, M. (2009). **Matematika Keuangan**. ITB. Bandung.

LAMPIRAN A

Penulis bernama Dewi Eka Priyanti, biasa dipanggil Dewi. Penulis dilahirkan di Tulungagung, 30 Juli 1994. Penulis merupakan putri dari pasangan Ir. Yahmin dan Sukarti, S.E. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Dharma Wanita (1998-2000), SDN II Mirigambar (2000-2006), SMPN 1 Ngunut(2006-2009), dan SMAN 1 Boyolangu(2009-2012). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya dengan NRP 1212 100 010 pada tahun 2012. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selama kuliah, penulis memiliki pengalaman berorganisasi menjadi staff Perekonomian HIMATIKA serta aktif dalam beberapa acara kepanitiaan, seperti menjadi OC Padamu HIMATIKA ITS pada tahun 2013, sie. Acara dan penanggung jawab regional Purwokerto pada acara OMITS HIMATIKA ITS tahun 2014, panitia TD HIMATIKA ITS pada tahun 2014, dan menjadi koordinator sie Dana dari Big Event OMITS HIMATIKA ITS tahun 2014-2015.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: *dewiekapriyanti.dep@gmail.com*